

Уфимский государственный нефтяной технический университет

Олимпиада УГНТУ-2021 по математике

1. Решить уравнение (10 баллов)

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{4x - x^2 - 3}$$

2. На горизонтальное дно цилиндрического сосуда с водой поместили шар радиуса R . В результате поверхность жидкости стала касательной к шару. То же самое происходит в случае, когда вместо шара радиуса R поместить на дно цилиндра шар радиуса $m \times R$. Вычислить радиус основания цилиндра. Определить при каких значениях m задача имеет решение (20 баллов).

3. Решить неравенство (5 баллов)

$$x \cdot 3^{\log_{1/9}(16x^4 - 8x^2 + 1)} < \frac{1}{3}$$

4. В арифметической прогрессии сумма первых $3n$ членов равна сумме следующих n членов. Найти отношение первых $2n$ членов к сумме следующих $2n$ членов (20 баллов).

5. Решить уравнение (10 баллов)

$$\sin 3x + \cos 2x = \cos 4x - 3 \cdot |\sin x|$$

6. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC расположены точки D и E соответственно так, что CB – биссектриса треугольника ABC , DE – биссектриса треугольника ACD , $EC=ED=4/9$, $BC=1$. Найти CD и площадь S треугольника ABC (20 баллов).

7. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\log_7(7^x - \log_7 a) = 2x$ имеет единственное решение (10 баллов).

8. Учитель математики выписал на доске многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и сказал: «Сегодня у моего сына день рождения. Если его возраст A подставить в данный многочлен вместо x , то получится равенство $f(A) = A$. Заметьте также, что $f(0) = P$, где P – простое число, большее A ». Сколько лет сыну учителя? (5 баллов)