

Олимпиада УГНТУ-2022
по Математике

1. Упростите выражение $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ (5 баллов)
2. Определить все значения параметра a , при которых уравнение имеет два различных корня.
 $x + |x| = 2\sqrt{3+a(x-2)}$ (20 баллов)
Укажите эти корни при каждом из найденных значений.
3. Найти все решения неравенства
 $\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} > \sin x - \cos x$,
удовлетворяющее условию $0 \leq x \leq \pi$ (10 баллов)
4. В ромбе $ABCD$ на отрезке BC найдась точка E такая, что $AE = CD$. Отрезок ED пересекается с описанной окружностью треугольника AEB в точке F . Доказать, что точки A, F и C лежат на одной прямой. (10 баллов)
5. Решить уравнение
 $\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0$ (10 баллов)
6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ CA_1 наклонена к плоскости основания под углом 30° и образует угол 30° с плоскостью, проходящей через диагональ AC_1 и середину бокового ребра BB_1 . Найти все ребра параллелепипеда, если его диагональ равна d . (20 баллов)
7. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит p членов. Их первые члены соответственно равны $1, 2, 3, \dots, p$, а разности равны $1, 3, 5, \dots, 2p-1$. Найти сумму p первых членов всех прогрессий. (20 баллов)
8. Решить уравнение
 $x^{2\lg^3 x - 1.5 \lg x} = \sqrt{10}$ (5 баллов).

3. Найти все решения неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} > \sin x - \cos x, \text{ удовлетворяющее условию } 0 \leq x \leq \pi.$$

Решение: Найдем ОДЗ: $\frac{1}{2} - \cos 2x \geq 0 \Rightarrow$

$$\text{т.к. } 0 \leq x \leq \pi, \text{ то } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right].$$

Рассмотрим три случая:

$$(1) \sin x - \cos x < 0, \cos x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x < 1 \text{ или } \cos x > 0 \\ \tan x > 1 \text{ или } \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4} \right);$$

$$(2) \sin x - \cos x \geq 0, \cos x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x \geq 1 \text{ или } \cos x > 0 \\ \tan x \leq 1 \text{ или } \cos x < 0 \end{cases}.$$

Возведем в квадрат обе части исходного неравенства. Получим $\frac{1}{2} - \cos 2x > 1 - \sin 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin 2x - \cos 2x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x > 0 \Rightarrow$$

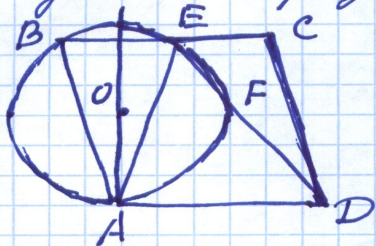
$$\Rightarrow \tan^2 x + 4 \tan x - 3 > 0. \text{ Решая это неравенство с учетом ОДЗ, получим } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi - \arctan(2 + \sqrt{7}) \right).$$

$$(3). \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Полученные значения x удовлетворяют исходному неравенству. Объединяя найденные решения получаем

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}; \pi - \arctan(2 + \sqrt{7}) \right).$$

4. Пусть r - радиус окружности, a - сторона ромба.



Прямая, проходящая через точки A и E, имеет уравнение $y = kx$.

Пусть абсцисса точки E равна b .

$$\Rightarrow A(0;0); O(0;r); D(a;0); E(b;kb); C(a-b;kb).$$

$$|AE| = a \Rightarrow b^2 + (kb)^2 = a^2 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(b; \sqrt{a^2 - b^2}), C(a-b; \sqrt{a^2 - b^2}).$$

$$|OE| = r \Rightarrow b^2 + (\sqrt{a^2 - b^2} - r)^2 = r^2 \Rightarrow r = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Прямая, проходящая через точки E и D, имеет уравнение: $y = (a-x) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$

Пусть абсцисса точки F равна $x \Rightarrow F(x; (a-x) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}})$

Точка F принадлежит окружности $x^2 + (y-r)^2 = r^2.$

Подставив в это уравнение координаты точки F, получим

$$x = \left[\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right] \text{ или } F(b; \sqrt{a^2 - b^2})$$

При $x=b$ получим, что точка F совпадает с т. E, а этого не может быть.

Прямая, проходящая через точки A и C, имеет следующее уравнение: $y = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \cdot x$.

$y(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \Rightarrow$ координаты точки F удовлетворяют этому уравнению $\Rightarrow$ точки A, C и F лежат на одной прямой.

5. Решить уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 = 0$

Решение: $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x+1 \\ v^2 = \frac{x-1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^2 - 1 \\ x = \frac{1}{1-v^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow u^2 - 1 = \frac{1}{1-v^2} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u^2 - 1)(v^2 - 1) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 v^2 - u^2 - v^2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (uv)^2 - (u^2 + v^2) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (uv)^2 - [u^2 - 2uv + v^2 + 2uv] + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (uv)^2 - (u - v)^2 - 2uv + 2 = 0 \Rightarrow (uv)^2 - 2uv + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (uv - 1)^2 = 0$$

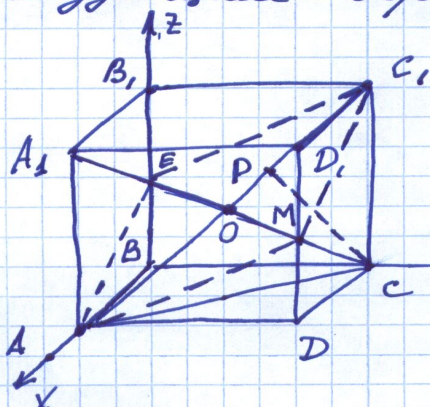
$$\begin{cases} uv = 1 \\ u - v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ (v + 1)v = 1 \end{cases} \Rightarrow v^2 + v - 1 = 0; v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Т.к. $v \geq 0 \Rightarrow v = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$u = v + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; u^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = u^2 - 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

6. Обозначим стороны основания параллелепипеда AB и BC через a и b соответственно, а диагональ через d. Введем систему координат следующим образом. $\angle A_1CA = 30^\circ \Rightarrow AA_1 = d \cdot \sin 30^\circ = \frac{d}{2}$.



В данной системе координат $A(a; 0; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(0; b; 0)$, $D(a; b; 0)$, $A_1(a; 0; \frac{d}{2})$, $B_1(0; 0; \frac{d}{2})$, $C_1(0; b; \frac{d}{2})$, $D_1(a; b; \frac{d}{2})$, $E(0; 0; \frac{d}{4}) \Rightarrow M(a; b; \frac{d}{4})$. Точка O — точка

пересечения диагоналей параллелепипеда $\Rightarrow O(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{d}{4})$.

Объем параллелепипеда $V = abd$.

Из треугольника ADC: $a^2 + b^2 = (d \cdot \cos 30^\circ)^2 = \frac{3d^2}{4}$.

Пусть $\overline{CP}$ - перпендикуляр, опущенной из точки C на плоскость EC, MA (точка P принадлежит плоскости EC, MA и имеет следующие координаты $P(x; y; z)$).

Прямая A, C пересекает плоскость EC, MA в точке $O \Rightarrow |\overline{CP}| = OC \cdot \cos 30^\circ = \frac{d}{4}$.

$$\overline{CP} = \{x; y-b; z\}, \quad \overline{EC} = \{0; b; \frac{d}{4}\}, \quad \overline{EA} = \{a; 0; \frac{d}{4}\}, \quad \overline{AP} = \{x-a; y; z\}.$$

$$|\overline{CP}| = \frac{d}{4} \Rightarrow x^2 + (y-b)^2 + z^2 = \frac{d^2}{16} \quad (1),$$

$$\overline{CP} \perp \overline{EC} \Rightarrow (y-b)b + \frac{dz}{4} = 0 \Rightarrow y = b - \frac{dz}{4b} \quad (2),$$

$$\overline{CP} \perp \overline{EA} \Rightarrow ax - \frac{dz}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{dz}{4a} \quad (3),$$

$$\overline{CP} \perp \overline{AP} \Rightarrow -x(a-x) + y(y-b) + z^2 = 0 \quad (4).$$

Подставим выражения (2) и (3) в соотношения (1) и (4)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 z^2}{16a^2} + \frac{d^2 z^2}{16b^2} + z^2 &= \frac{d^2}{16} \\ -\frac{dz}{4a} \left(a - \frac{dz}{4b} \right) + \frac{dz}{4b} \left(b - \frac{dz}{4b} \right) + z^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Решая эту систему получим $d = 8z$. $\Rightarrow$ Из первого уравнения системы следует

$$\frac{d^2}{16a^2} + \frac{d^2}{16b^2} + 1 = 4. \quad \frac{d^2(a^2+b^2)}{16a^2b^2} = 3 \Rightarrow 16a^2b^2 = \frac{d^2}{4}(a^2+b^2) = \frac{d^4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2b^2 = \frac{d^4}{64} \Rightarrow ab = \frac{d^2}{8} \Rightarrow V = \frac{abd}{2} = \frac{d^2 \cdot d}{8 \cdot 2} = \frac{d^3}{16}.$$

7. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны $1, 2, 3, \dots, p$, а разности равны $1, 3, 5, \dots, 2p-1$. Найти сумму всех членов всех прогрессий.

Решение: По формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

запишем p сумм:

$$S_{n,1} = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n = n + \frac{n-1}{2} \cdot n$$

$$S_{n,2} = \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n = 2n + \frac{(n-1)}{2} \cdot 3n$$

$$S_{n,3} = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 5}{2} \cdot n = 3n + \frac{n-1}{2} \cdot 5n$$

$$S_{p,n} = \frac{2p + (n-1)(2p-1)}{2} \cdot n = p \cdot n + \frac{n-1}{2} (2p-1) \cdot n.$$

$$\begin{aligned} S_{n,1} + S_{n,2} + \dots + S_{n,p} &= n(1+2+3+\dots+p) + \\ &+ \frac{n-1}{2} \cdot n \cdot (1+3+5+\dots+2p-1) = n \cdot \frac{1+p}{2} \cdot p + \frac{n-1}{2} \cdot n \cdot \frac{1+2p-1}{2} \cdot p = \\ &= \frac{np}{2} (1+p) + \frac{np}{2} (n-1)p = \frac{np}{2} (1+p+n p - p) = \frac{np}{2} (1+np) \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{np}{2} (1+np)$.

Решение

1. (5 баллов) Упростите выражение

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}} &= 2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{5-2\sqrt{3}-1}} = \\
 &= 2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}} = 2\sqrt{3+\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \\
 &= \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{2 \cdot (\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = \sqrt{6} + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

2. ОДЗ: $3+a(x-2) \geq 0$.

Рассмотрим случаи:

① $x < 0 \Rightarrow 0 = 2\sqrt{3+a(x-2)} = 3+a(x-2) = 0$. Вектор
 Если $a \neq 0 \Rightarrow x = 2 - 3/a < 0$. Проверка ОДЗ,
 получим, что при $a \in (0; \frac{3}{2})$, $x = 2 - \frac{3}{a}$.

Если $a = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$.

② $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{3+a(x-2)} \Rightarrow (x - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - 2a + 3$.

Пусть $f(x) = (x - \frac{a}{2})^2$ Если $a = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \in \text{ОДЗ} \Rightarrow$ при $a = 0$; $x = \sqrt{3}$;Если $a > 0$, то (2.1) при $\frac{a^2}{4} - 2a + 3 = 0$ получим

$\begin{cases} a = 2 \Rightarrow x = 1, \\ a = 6 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$, что соответствует ОДЗ;

(2.2) при $\frac{a^2}{4} - 2a + 3 > f(0) = \frac{a^2}{4}$, т.е. при $a < \frac{3}{2}$
 существует один корень $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}$.

Проверка ОДЗ, получим, что при $a \in (0; \frac{3}{2})$
 $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}$;

(2.3) при $0 < \frac{a^2}{4} - 2a + 3 \leq f(0) = \frac{a^2}{4}$, т.е. при

$a \in [\frac{3}{2}; 2) \cup (6; +\infty)$ существует два корня

$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}$. Проверка этих корней на
 соответствие ОДЗ при заданных значениях
 параметра a , получим, что при

$a \in [\frac{3}{2}; 2) \cup (6; +\infty)$ $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}$;

если $a < 0$, то может существовать решение

$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}$ при $0 < \frac{a^2}{4} - 2a + 3 \leq f(0) = \frac{a^2}{4}$;

т.е. при $a \in (0; \frac{3}{2})$, а это противоречит
 условию $a < 0$.

Т.о.: при $a \in (0; \frac{3}{2})$ существует три корня

$$x = 2 - \frac{3}{a}; \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3},$$

при $a \in [\frac{3}{2}; 2) \cup (6; \infty)$ существует два корня

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 2a + 3}.$$

8. Решить уравнение

$$x^2 \lg^3 x - 1,5 \lg x = \sqrt{10}.$$

Решение: Если уравнение содержит логарифм в показателе степени, то оно решается логарифмированием обеих частей уравнения по некоторому основанию (в данном случае по основанию 10).

$$\lg x \cdot 2 \lg^3 x - 1,5 \lg x = 0,5;$$

$$4 \lg^4 x - 3 \lg^2 x - 1 = 0.$$

Обозначим $\lg^2 x = y$. Получим квадратное уравнение

$$4y^2 - 3y - 1 = 0$$

Его корни $y_1 = 1$; $y_2 = -\frac{1}{4}$. Так как $\lg^2 x > 0$, то

$$\lg^2 x = 1 \Rightarrow \lg x = \pm 1. \text{ Тогда } x_1 = 10; x_2 = \frac{1}{10}$$

Оба эти значения x удовлетворяют условию $x > 0$.